

§1 BẤT ĐẲNG THỨC (tiếp theo)

Dạng 2. Các kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Cauchy

3. Ghép đối xứng

a) Cho $X, Y, Z \geq 0$. Chứng minh $X + Y + Z \geq A + B + C$.

$$\text{Chứng minh. Ta có } \begin{cases} X + Y \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2A \\ Y + Z \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2B \\ Z + X \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2C \end{cases} \Rightarrow X + Y + Z \geq A + B + C.$$

$$\text{Tổng quát. Ta có } \begin{cases} mX + nY + pZ \geq (m + n + p)A \\ mY + nZ + pX \geq (m + n + p)B \\ mZ + nX + pY \geq (m + n + p)C \end{cases} \Rightarrow (m + n + p)(X + Y + Z) \geq (m + n + p)(A + B + C).$$

b) Cho $X, Y, Z \geq 0$. Chứng minh $XYZ \geq ABC$.

$$\text{Nếu chứng minh được } \begin{cases} XY \geq A^2 \\ YZ \geq B^2 \\ ZX \geq C^2 \end{cases} \stackrel{\text{Nhân}}{\Rightarrow} XYZ \geq \sqrt{A^2 B^2 C^2} = |ABC| \geq ABC.$$

❖ **Bài 44.** Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \geq 0$, ta luôn có $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

💬 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} a^2 + b^2 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{a^2 b^2} = 2ab \\ b^2 + c^2 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{b^2 c^2} = 2bc \\ c^2 + a^2 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{c^2 a^2} = 2ac \end{cases} \Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c \geq 0$. □

❖ **Bài 45.** Chứng minh với mọi $a, b, c \geq 0$ thì ta luôn có $ab + bc + ca \geq \sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$.

💬 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} ab + bc \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{ab \cdot bc} = 2b\sqrt{ac} \\ bc + ca \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{bc \cdot ca} = 2c\sqrt{ab} \\ ca + ab \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{ca \cdot ab} = 2a\sqrt{bc} \end{cases} \begin{aligned} &\text{Suy ra } 2(ab + bc + ca) \geq 2(a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}) \\ &\text{hay } ab + bc + ca \geq \sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}). \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c \geq 0$. □

❖ **Bài 46.** Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ và khác 0 thì $\frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$.

💬 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{\frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{c^2}{b^2}} = 2\left|\frac{a}{b}\right| \geq 2 \cdot \frac{a}{b} \\ \frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{\frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{a^2}} = 2\left|\frac{c}{a}\right| \geq 2 \cdot \frac{c}{a} \\ \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2} \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{c^2}} = 2\left|\frac{b}{c}\right| \geq 2 \cdot \frac{b}{c} \end{cases}$$

Suy ra

$$2\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) \geq 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \text{ hay } \frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} \geq 0$. □

❖ **Bài 47.** Chứng minh rằng với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ thì ta luôn có $4a^2 + 9b^2 + 5 \geq 4(a + 3b)$.

💬 **Lời giải.**

Ta có

$$4a^2 + 9b^2 + 5 = (4a^2 + 1) + (9b^2 + 4) \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{4a^2 \cdot 1} + 2\sqrt{9b^2 \cdot 4} = 4|a| + 12|b| \geq 4a + 12b = 4(a + 3b).$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = \frac{1}{2}$ và $b = \frac{2}{3}$. □

❖ **Bài 48.** Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \geq 0$ thì ta có $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$.

💬 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} a^3 + a^3 + b^3 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 3\sqrt[3]{a^3 \cdot a^3 \cdot b^3} = 3a^2b \\ b^3 + b^3 + c^3 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 3\sqrt[3]{b^3 \cdot b^3 \cdot c^3} = 3b^2c \\ c^3 + c^3 + a^3 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 3\sqrt[3]{c^3 \cdot c^3 \cdot a^3} = 3c^2a \end{cases} \Rightarrow 3(a^3 + b^3 + c^3) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a) \text{ hay } a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c \geq 0$. □

❖ **Bài 49.** Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \geq 0$ thì ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}$.

💬 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} a^2 + a^2 + b^2 + c^2 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 4\sqrt[4]{a^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} = 4a\sqrt{bc} \\ b^2 + b^2 + c^2 + a^2 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 4\sqrt[4]{b^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot a^2} = 4b\sqrt{ac} \\ c^2 + c^2 + a^2 + b^2 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 4\sqrt[4]{c^2 \cdot c^2 \cdot a^2 \cdot b^2} = 4c\sqrt{ab}. \end{cases}$$

Suy ra

$$4(a^2 + b^2 + c^2) \geq 4(a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}) \text{ hay } a^2 + b^2 + c^2 \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c \geq 0$. □

❖ **Bài 50.** Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$ thì $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$.

💬 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{a^3}{b} + ab \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2a^2 \\ \frac{b^3}{c} + bc \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2b^2 \\ \frac{c^3}{a} + ca \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2c^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca).$$

Mặt khác, theo kết quả bài 40, ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, cho nên $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$.

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c > 0$. □

❖ **Bài 51.** Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$ thì ta có $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$.

 **Lời giải.**

Điều cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right)^2 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) \Leftrightarrow \left(\frac{ab}{c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a}\right)^2 + \left(\frac{ca}{b}\right)^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$\text{Ta có } \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{ab}{c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a}\right)^2 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{\left(\frac{ab}{c}\right)^2 \cdot \left(\frac{bc}{a}\right)^2} = 2b^2 \\ \left(\frac{bc}{a}\right)^2 + \left(\frac{ca}{b}\right)^2 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{\left(\frac{bc}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{ca}{b}\right)^2} = 2c^2 \\ \left(\frac{ca}{b}\right)^2 + \left(\frac{ab}{c}\right)^2 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{\left(\frac{ca}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{ab}{c}\right)^2} = 2a^2. \end{array} \right.$$

Cộng vế theo vế ta được

$$\left(\frac{ab}{c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a}\right)^2 + \left(\frac{ca}{b}\right)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Do đó

$$\left(\frac{ab}{c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a}\right)^2 + \left(\frac{ca}{b}\right)^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c > 0$.

❖ **Bài 52.** Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \geq 0$ thì $a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) \geq 6abc$.

 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} 1 + b^2 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2b \\ 1 + c^2 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2c \\ 1 + a^2 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2(1 + b^2) \geq 2a^2b \\ b^2(1 + c^2) \geq 2b^2c \\ c^2(1 + a^2) \geq 2c^2a. \end{cases}$$

Từ đó

$$a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2) \geq 2a^2b+2b^2c+2c^2a \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 3\sqrt[3]{2a^2b \cdot 2b^2c \cdot 2c^2a} = 6abc.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$.

❖ **Bài 53.** Chứng minh rằng với $a, b, c \geq 0$ thì ta luôn có $(1+a)(1+b)(1+c) \geq \left(1 + \sqrt[3]{abc}\right)^3$.

 Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \stackrel{Cauchy}{\geq} 3 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}} \\ \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \stackrel{Cauchy}{\geq} 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}. \end{cases}$

Cộng vế theo vế, ta được

$$3 \geq 3 \frac{1 + \sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}} \Leftrightarrow (1+a)(1+b)(1+c) \geq (1 + \sqrt[3]{abc})^3.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c > 0$.

❖ **Bài 54.** Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \geq 0$ ta có $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

💬 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} a+b \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{ab} \\ b+c \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{bc} \\ c+a \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{ca} \end{cases} \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c \geq 0$. □

❖ **Bài 55.** Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$ ta luôn có $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 16\sqrt{2}abc$.

💬 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} a^2+2 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{2}a \\ b^2+2 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{2}b \\ c^2+2 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{2}c \end{cases} \Rightarrow (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 16\sqrt{2}abc.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{2}$. □

❖ **Bài 56.** Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \geq 0$ ta có $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc$.

💬 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} a+b+c \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 3\sqrt[3]{abc} \\ a^2+b^2+c^2 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \end{cases} \Rightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c \geq 0$. □

❖ **Bài 57.** Chứng minh rằng với mọi $a > 0, b > 0$ ta có $(a+b+2) \cdot \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}\right) \geq 4$.

💬 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} a+b+2 = (a+1) + (b+1) \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{(a+1)(b+1)} \\ \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{(a+1)(b+1)}} \end{cases} \Rightarrow (a+b+2) \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}\right) \geq 4.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b \geq 0$. □

❖ **Bài 58.** Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$ thì ta có $(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{2}$.

💬 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2(a+b+c) = (a+b) + (b+c) + (c+a) \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 3 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \end{cases}$$

Từ đó

$$2(a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq 9 \text{ hay } (a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c > 0$. □

❖ **Bài 59.** Cho $a > 0, b > 0, c > 0$. Chứng minh $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$. (BĐT Nesbitt)

💬 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 - 3 \\ &= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3 \\ &= (a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) - 3 \stackrel{\text{Bài 54}}{\geq} \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c > 0$. □

4. Kỹ Thuật Cauchy ngược dấu

Một số trường hợp nếu đánh giá trực tiếp bằng Cauchy ngược dấu thì sẽ đưa về dạng $A \leq P \geq B$: Không nói lên được điều gì. Khi đó ta biến đổi và áp dụng bất đẳng thức Cauchy ngược dấu sẽ tránh được điều này. Chắn hạn cần chứng minh: $\frac{a}{1+b^2} \geq ?!$. Nếu áp dụng Cauchy dưới mẫu số được $\frac{a}{1+b^2} \leq \frac{a}{2b}$ sẽ không đạt yêu cầu. Khi đó cần thêm trước nó là dấu “-”. Tức là biến đổi

$$\frac{a}{1+b^2} = \frac{a(1+b^2) - ab^2}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$$

sẽ được mong muốn.

Thông thường, sau khi sử dụng kỹ thuật ngược dấu sẽ đưa bài toán về bất đẳng thức hoán vị về bất đẳng thức đối xứng và giản lược đi mẫu số, giúp ta dễ dàng xử lý hơn so với đề nguyên thủy.

❖ **Bài 60.** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2}$

💬 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \frac{x}{1+y^2} = \frac{x(1+y^2) - xy^2}{1+y^2} = x - \frac{xy^2}{1+y^2} \geq x - \frac{xy^2}{2\sqrt{1 \cdot y^2}} = x - \frac{xy}{2} \quad (1).$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1.$$

$$\text{Tương tự } \frac{y}{1+z^2} \geq y - \frac{yz}{2} \quad (2), \quad \frac{z}{1+x^2} \geq z - \frac{zx}{2} \quad (3).$$

Cộng vế theo vế của (1), (2) và (3), ta có

$$\frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2} \geq x + y + z - \frac{xy + yz + zx}{2}.$$

Mặt khác

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \Leftrightarrow xy + yz + zx \leq 3 \Leftrightarrow -\frac{xy + yz + zx}{2} \geq -\frac{3}{2}$$

Suy ra

$$P \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Kết luận.

Giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3}{2}$ khi $x = y = z = 1$. □

✧ **Bài 61.** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{x + 2y^2} + \frac{y^2}{y + 2z^2} + \frac{z^2}{z + 2x^2}$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $\frac{x^2}{x + 2y^2} = \frac{x(x + 2y^2) - 2xy^2}{x + 2y^2} = x - \frac{2xy^2}{x + 2y^2} \geq x - \frac{2xy^2}{3\sqrt[3]{x \cdot y^2 \cdot y^2}} = x - \frac{2}{3}\sqrt[3]{(xy)^2}$ (1).

Đấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

Tương tự $\frac{y^2}{y + 2z^2} \geq y - \frac{2}{3}\sqrt[3]{(yz)^2}$ (2), $\frac{z^2}{z + 2x^2} \geq z - \frac{2}{3}\sqrt[3]{(zx)^2}$ (3).

Cộng vế theo vế của (1), (2) và (3), ta có

$$\frac{x^2}{x + 2y^2} + \frac{y^2}{y + 2z^2} + \frac{z^2}{z + 2x^2} \geq x + y + z - \frac{2}{3} \left(\sqrt[3]{(xy)^2} + \sqrt[3]{(yz)^2} + \sqrt[3]{(zx)^2} \right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\begin{cases} x + y + xy \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2} \\ y + z + yz \geq 3\sqrt[3]{y^2z^2} \\ z + x + zx \geq 3\sqrt[3]{z^2x^2}. \end{cases}$$

Cộng vế theo vế, ta có

$$2(x + y + z) + xy + yz + zx \geq 3.$$

Mặt khác, với $x + y + z = 3$, ta có

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \Leftrightarrow xy + yz + zx \leq 3 \left(\sqrt[3]{(xy)^2} + \sqrt[3]{(yz)^2} + \sqrt[3]{(zx)^2} \right).$$

Suy ra

$$\sqrt[3]{(xy)^2} + \sqrt[3]{(yz)^2} + \sqrt[3]{(zx)^2} \leq 3.$$

Khi đó

$$P \geq 3 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 1.$$

Kết luận.

Giá trị nhỏ nhất của P bằng 1 khi $\begin{cases} x = y^2, y = z^2, z = x^2 \\ x > 0, y > 0, z > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1$. □

✧ **Bài 62.** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{x + 2y^3} + \frac{y^2}{y + 2z^3} + \frac{z^2}{z + 2x^3}$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $\frac{x^2}{x + 2y^3} = \frac{x(x + 2y^3) - 2xy^3}{x + 2y^3} = x - \frac{2xy^3}{x + 2y^3} \geq x - \frac{2xy^3}{3\sqrt[3]{x \cdot y^3 \cdot y^3}} = x - \frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2y}$ (1).

Đấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y^3 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

Tương tự $\frac{y^2}{y+2z^3} \geq y - \frac{2}{3}\sqrt[3]{y^2}z$ (2), $\frac{z^2}{z+2x^3} \geq z - \frac{2}{3}\sqrt[3]{z^2}x$ (3).

Cộng vế theo vế của (1), (2) và (3), ta có

$$\frac{x^2}{x+2y^3} + \frac{y^2}{y+2z^3} + \frac{z^2}{z+2x^3} \geq x + y + z - \frac{2}{3}(\sqrt[3]{x^2}y + \sqrt[3]{y^2}z + \sqrt[3]{z^2}x).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\begin{cases} xy + xy + y \geq 3\sqrt[3]{x^2y^3} = 3\sqrt[3]{x^2}y \\ yz + yz + z \geq 3\sqrt[3]{y^2z^3} = 3\sqrt[3]{y^2}z \\ zx + zx + x \geq 3\sqrt[3]{z^2x^3} = 3\sqrt[3]{z^2}x. \end{cases}$$

Cộng vế theo vế, ta có

$$2(xy + yz + zx) + x + y + z \geq 3(\sqrt[3]{x^2}y + \sqrt[3]{y^2}x + \sqrt[3]{z^2}x).$$

Mặt khác, với $x + y + z = 3$, ta có

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \Leftrightarrow xy + yz + zx \leq 3.$$

Suy ra

$$\sqrt[3]{x^2}y + \sqrt[3]{y^2}x + \sqrt[3]{z^2}x \leq 3.$$

Khi đó

$$P \geq 3 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 1.$$

Kết luận.

Giá trị nhỏ nhất của P bằng 1 khi $\begin{cases} x = y^3, y = z^3, z = x^3 \\ x > 0, y > 0, z > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$ □

✧ **Bài 63.** Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+1}{y^2+1} + \frac{y+1}{z^2+1} + \frac{z+1}{x^2+1}$.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\frac{x+1}{y^2+1} = \frac{(x+1)(y^2+1) - (x+1)y^2}{y^2+1} = x+1 - \frac{(x+1)y^2}{y^2+1} \geq x+1 - \frac{(x+1)y^2}{2\sqrt{1 \cdot y^2}} = x+1 - \frac{1}{2}(x+1)y \quad (1).$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow y = 1$.

$$\text{Tương tự } \frac{y+1}{z^2+1} \geq y+1 - \frac{1}{2}(y+1)z \quad (2), \quad \frac{z+1}{x^2+1} \geq z+1 - \frac{1}{2}(z+1)x \quad (3).$$

Cộng vế theo vế của (1), (2) và (3), ta có

$$\frac{x+1}{y^2+1} + \frac{y+1}{z^2+1} + \frac{z+1}{x^2+1} \geq x + y + z + 3 - \frac{1}{2}(xy + yz + zx + x + y + z).$$

Rút gọn vế phải, ta có

$$\frac{x+1}{y^2+1} + \frac{y+1}{z^2+1} + \frac{z+1}{x^2+1} \geq \frac{1}{2}(x + y + z) + 3 - \frac{1}{2}(xy + yz + zx).$$

Mặt khác, với $x + y + z = 3$, ta có

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \Leftrightarrow xy + yz + zx \leq 3.$$

Khi đó

$$P \geq \frac{1}{2} \cdot 3 + 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 = 3.$$

Kết luận.

Giá trị nhỏ nhất của P bằng 3 khi $x = y = z = 1$. □

5. Kỹ thuật sử dụng trọng số để tìm điểm rơi

✧ **Bài 64.** Cho ba số thực dương a, b, c thoả mãn điều kiện $a + b + c = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt[3]{a+3b} + \sqrt[3]{b+3c} + \sqrt[3]{c+3a}$.

Lời giải.

Phân tích: Vì vai trò của a, b, c như nhau nên ta dự đoán giá trị lớn nhất sẽ đạt được khi $a = b = c = 2$.

Do đó, ta cần tìm $\alpha, \beta > 0$ sao cho $\alpha = \beta = a + 3b = 8$ để khi đánh giá Cauchy cho ba số $\alpha, \beta, a + 3b$ thì dấu = xảy ra.

Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a+3b} &= \frac{1}{4} \sqrt[3]{8 \cdot 8 \cdot (a+3b)} \\ &\leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot (8 + 8 + a + 3b) = \frac{1}{12}(a + 3b + 16).\end{aligned}$$

Tương tự

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{b+3c} &\leq \frac{1}{12}(b + 3c + 16) \\ \sqrt[3]{c+3a} &\leq \frac{1}{12}(c + 3a + 16).\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } P = \sqrt[3]{a+3b} + \sqrt[3]{b+3c} + \sqrt[3]{c+3a} \leq \frac{1}{12} \cdot (4a + 4b + 4c + 48) = \frac{1}{12} \cdot 4 \cdot (6 + 12) = 6.$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } P \text{ là } 6 \text{ khi } \begin{cases} a + 3b = 8 \\ b + 3c = 8 \\ c + 3a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 2.$$

□

✧ **Bài 65 (HSG Sơn La).** Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn $xyz = 1$. Chứng minh

$$P = \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+x)(1+z)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

Lời giải.

Phân tích: Vì vai trò của x, y, z là như nhau nên dấu = xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Ta cần tìm $\alpha > 0$ sao cho

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{1+y}{\alpha} + \frac{1+z}{\alpha} \geq \dots$$

$$\text{Dấu = ở bất đẳng thức trên xảy ra khi } \begin{cases} \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} = \frac{1+y}{\alpha} = \frac{1+z}{\alpha} \\ x = y = z = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 8.$$

Do đó, ta có lời giải như sau

Ta có

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{1+y}{8} + \frac{1+z}{8} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{x^3}{8^2}} = \frac{3}{4}x.$$

Tương tự

$$\frac{y^3}{(1+x)(1+z)} + \frac{1+x}{8} + \frac{1+z}{8} \geq \frac{3}{4}y.$$

$$\frac{z^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{1+x}{8} + \frac{1+y}{8} \geq \frac{3}{4}z.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+x)(1+z)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{1+x}{4} + \frac{1+y}{4} + \frac{1+z}{4} \geq \frac{3}{4}(x+y+z) \\ \Rightarrow P & \geq \frac{x+y+z}{2} - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Vậy $P \geq \frac{3}{4}$.

Dấu = xảy ra khi $x = y = z = 1$. □

❖ **Bài 66.** Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng $\frac{x^5}{y^2} + \frac{y^5}{z^2} + \frac{z^5}{x^2} \geq x^3 + y^3 + z^3$.

💬 **Lời giải.**

Phân tích: Vì vai trò của x, y, z như nhau nên dấu = ở bất đẳng thức trên xảy ra khi $x = y = z$.
Với $m, n \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$m \cdot \frac{x^5}{y^2} + n \cdot y^3 \geq (m+n) \sqrt[m+n]{\frac{x^{5m}}{y^{2m}} \cdot y^{3n}} = (m+n) \cdot \sqrt[m+n]{x^{5m} \cdot y^{3n-2m}}.$$

Cần chọn m, n sao cho $\sqrt[m+n]{x^{5m} \cdot y^{3n-2m}} = x^3$, nghĩa là $m = 3, n = 2$.
Từ đó ta có bài giải như sau.

Ta có

$$3 \cdot \frac{x^5}{y^2} + 2 \cdot y^3 = \frac{x^5}{y^2} + \frac{x^5}{y^2} + \frac{x^5}{y^2} + y^3 + y^3 \geq 5 \sqrt[5]{\frac{x^5}{y^2} \cdot \frac{x^5}{y^2} \cdot \frac{x^5}{y^2} \cdot y^3 \cdot y^3} = 5x^3.$$

Tương tự ta có

$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{y^5}{z^2} + 2 \cdot z^3 & \geq 5y^3 \\ 3 \cdot \frac{z^5}{x^2} + 2 \cdot x^3 & \geq 5z^3. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & 3 \left(\frac{x^5}{y^2} + \frac{y^5}{z^2} + \frac{z^5}{x^2} \right) + 2(x^3 + y^3 + z^3) \geq 5(x^3 + y^3 + z^3) \\ \Rightarrow & \frac{x^5}{y^2} + \frac{y^5}{z^2} + \frac{z^5}{x^2} \geq x^3 + y^3 + z^3. \end{aligned}$$

□

❖ **Bài 67.** Cho các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 31$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x^2 + 3y^2 + 5z^2$.

💬 **Lời giải.**

Phân tích: Vì trong biểu thức của P , x, y, z không có tính chất đối xứng nên ta giả sử giá trị nhỏ nhất của P đạt được khi $x = a, y = b$ và $z = c$ với $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 31$.
Khi đó ta có

$$2x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 2(x^2 + a^2) + 3(y^2 + b^2) + 5(z^2 + c^2) - 2a^2 - 3b^2 - 5c^2 \geq 4ax + 6by + 10cz - 2a^2 - 3b^2 - 5c^2.$$

Lúc này, ta cần tìm a, b, c sao cho $\begin{cases} 4a = 6b = 10c \\ a + b + c = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 15 \\ b = 10 \\ c = 6. \end{cases}$

Từ đó, ta có bài giải như sau

$$\begin{aligned} P &= 2x^2 + 3y^2 + 5z^2 \\ &= 2(x^2 + 15^2) + 3(y^2 + 10^2) + 5(z^2 + 6^2) - 930 \\ &\geq 60x + 60y + 60z - 930 = 930. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 930 khi $x = 15, y = 10, z = 6$. □

✧ **Bài 68.** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{2a}{2b+2c-a}} + \sqrt{\frac{2b}{2a+2c-b}} + \sqrt{\frac{2c}{2a+2b-c}}.$$

 **Lời giải.**

Ta có

$$\sqrt{\frac{2a}{2b+2c-a}} = \sqrt{\frac{6a^2}{3a(2a+2b-c)}} \geq \frac{\sqrt{6}a}{\frac{3a+(2b+2c-a)}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{a+b+c}.$$

Tương tự ta cũng có

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2b}{2a+2c-b}} &\geq \frac{b\sqrt{6}}{a+b+c}. \\ \sqrt{\frac{2c}{2a+2b-c}} &\geq \frac{c\sqrt{6}}{a+b+c}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } P = \sqrt{\frac{2a}{2b+2c-a}} + \sqrt{\frac{2b}{2a+2c-b}} + \sqrt{\frac{2c}{2a+2b-c}} \geq \frac{\sqrt{6}(a+b+c)}{a+b+c} = \sqrt{6}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{6}$ khi $a = b = c$, nghĩa là tam giác đã cho là tam giác đều. □

✧ **Bài 69.** Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{2y+x+z} + \frac{1}{2z+x+y}.$$

 **Lời giải.**

Trước tiên ta cần chứng minh với mọi $a, b > 0$ thì

$$\frac{1}{a+b} \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

$$\text{Thật vậy, ta có } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{\frac{a+b}{2}} = \frac{4}{a+b}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{a+b} \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Áp dụng bất đẳng thức trên cho từng phân thức 2 lần ta được

$$\frac{1}{2x+y+z} = \frac{1}{2x+(y+z)} \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y+z} \right) \geq \frac{1}{8x} + \frac{1}{16y} + \frac{1}{16z}.$$

Tương tự

$$\frac{1}{2y+x+z} \geq \frac{1}{8y} + \frac{1}{16x} + \frac{1}{16z}$$

$$\frac{1}{2z+x+y} \geq \frac{1}{8z} + \frac{1}{16x} + \frac{1}{16y}.$$

Suy ra

$$P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{2y+x+z} + \frac{1}{2z+x+y} \geq \frac{3}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{3}{16} \cdot 4 = \frac{3}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4}$ khi $x = y = z = \frac{4}{3}$. □

❖ **Bài 70.** Chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

a) $\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3} \forall x, y, z > 0 \text{ và } xyz = 1.$

b) $\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{b^2+c^2} + \frac{c}{a^2+c^2} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}$ với a, b, c là các số thực dương.

💬 **Lời giải.**

a) Ta có $\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} \geq \frac{\sqrt{3\sqrt[3]{x^3y^3}}}{xy} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}.$

Tương tự ta có $\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}; \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}.$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \right) \geq \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2y^2z^2}} = 3\sqrt{3}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

b) Ta có $\frac{a^2+b^2}{a} = a + \frac{b^2}{a} \geq 2b \Rightarrow \frac{a}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2b}.$

Tương tự ta có $\Rightarrow \frac{a}{b^2+c^2} \leq \frac{1}{2c}; \frac{a}{a^2+c^2} \leq \frac{1}{2a}.$

Cộng vế với vế, ta có $\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{b^2+c^2} + \frac{c}{a^2+c^2} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}.$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

❖ **Bài 71.** Chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

a) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$

b) Cho $\forall a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ và $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq 2$. Chứng minh $abc \leq \frac{1}{8}.$

c) $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz$, với $\forall x > 0, y > 0, z > 0$ và $x+y+z = xyz$.

 Lời giải.

a) Đặt $2x = c + b - a$; $2y = a + c - b$; $2z = a + b - c$.

$$\Rightarrow a = y + z; b = x + z; c = x + y.$$

$$\text{Bất đẳng thức} \Leftrightarrow 8xyz \leq (x+y)(y+z)(z+x).$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có } \begin{cases} x+y \geq 2\sqrt{xy} \\ y+z \geq 2\sqrt{yz} \\ z+x \geq 2\sqrt{zx} \end{cases}$$

Nhân vế với vế, ta có điều phải chứng minh.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$.

b) Ta có

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{1+a} \geq \left(1 - \frac{1}{1+b}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+c}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+a} \geq \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+a} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{(b+1)(c+1)}}.$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{1}{1+b} \geq 2\sqrt{\frac{ac}{(a+1)(c+1)}} \text{ và } \frac{1}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{(a+1)(b+1)}}.$$

Nhân vế với vế, ta có

$$\frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)} \geq \frac{8abc}{(a+1)(b+1)(c+1)} \\ \Leftrightarrow abc \leq \frac{1}{8} \text{ đpcm.}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

c) Theo đề bài ta có $x + y + z = xyz \Leftrightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x} &= \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \\ &= \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}} \\ &= \frac{1}{x} + \sqrt{\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)} \\ &\leq \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{2}{x}}{2} \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$VT \leq 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{3(xy + yz + zx)}{xyz} = \frac{3(xy + yz + zx)}{x + y + z} \leq \frac{(x + y + z)^2}{x + y + z} = x + y + z = xyz. (\text{đpcm})$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \sqrt{3}$.

□

 **Bài 72.** Chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

- a) Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh $\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geq \frac{x+y+z}{2}$.
- b) Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$. Chứng minh $\frac{x^3}{y^2} + \frac{y^3}{z^2} + \frac{z^3}{x^2} \geq 3$.
- c) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh $\sqrt{a+3b} + \sqrt{b+3c} + \sqrt{c+3a} \leq 6$.
- d) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh $\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca} \leq \sqrt[3]{3}$.
- e) Cho $x, y \geq 4$. Chứng minh $x\sqrt{y-4} + y\sqrt{x-4} \leq \frac{xy}{2}$.
- f) Cho $x, y, z \geq 1$. Chứng minh $2xy\sqrt{z-1} + 2yz\sqrt{x-1} + 2zx\sqrt{y-1} \leq 3xyz$.

 Lời giải.

a) Ta có $\frac{x^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq x$; $\frac{y^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq y$; $\frac{z^2}{z+x} + \frac{z+x}{4} \geq z$.

Cộng vế với vế, ta được $\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geq \frac{x+y+z}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

b) Áp dụng BDT Cauchy, ta có $\frac{x^3}{y^2} + \frac{y^3}{z^2} + \frac{z^3}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(xyz)^3}{(xyz)^2}} = 3$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

c) Ta có $\sqrt{a+3b} = \frac{2\sqrt{a+3b}}{2} \leq \frac{a+3b+4}{4}$

Tương tự ta có $\sqrt{b+3c} \leq \frac{b+3c+4}{4}$; $\sqrt{c+3a} \leq \frac{c+3a+4}{4}$.

Cộng vế với vế ta có điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

d) Ta có $\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca} \leq \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{ab} \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{bc} \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{ca} \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \leq 1$.

Mà $\sqrt[3]{ab} \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \leq \frac{a+b+\frac{1}{3}}{3}$; $\sqrt[3]{bc} \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \leq \frac{b+c+\frac{1}{3}}{3}$; $\sqrt[3]{ca} \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \leq \frac{c+a+\frac{1}{3}}{3}$

Cộng vế với vế ta có $VT \leq \frac{2(a+b+c)+1}{3} = 1$ (đpcm).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

e) Ta có $x\sqrt{y-4} = x \frac{\sqrt{y-4} \cdot 2}{2} \leq x \frac{(y-4)+4}{4} = \frac{xy}{4}$.

Tương tự ta có $y\sqrt{x-4} \leq \frac{xy}{4}$.

Cộng vế với vế, ta có $x\sqrt{y-4} + y\sqrt{x-4} \leq \frac{xy}{2}$ (đpcm).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 8$.

f) Ta có $2xy\sqrt{z-1} + 2yz\sqrt{x-1} + 2zx\sqrt{y-1} \leq xy(z-1+1) + yz(x-1+1) + zx(y-1+1) \leq 3xyz$ (đpcm).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$.

□